PART2 二項定理

要点① パスカルの三角形

$(a+b)^3=$ 　　　　　　　　　　である。この公式を利用して，$(a+b)^4$ を展開すると

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4&=(a+b)^3(a+b)\\
&=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)\\
&=a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4\\
&=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rccccc}
 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
+) & & 1 & 3 & 3 & 1\\
\hline
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}
$$

$(a+b)^4$ の展開式における各項の係数だけを取り出すと，$(a+b)^3$ の展開式の各項の係数を 1 つずつずらして足したものになっている。すなわち $(a+b)^4$ の展開式における各項の係数は，両端の項の係数 1 以外は，$(a+b)^3$ の展開式における「隣接する項の係数の和」になっていることがわかる。

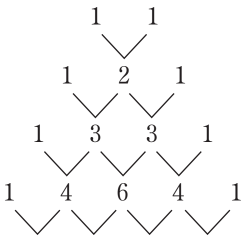
$(a+b)^n$ の展開式における各項の係数を並べると，右図のようになる。

このような数の配列を「　　　　　　　　　」という。

これを用いると，$(a+b)^5$ の展開式は

$(a+b)^5=a^5+\quad a^4b+\quad a^3b^2+\quad a^2b^3+\quad ab^4+b^5$

$(a+b)^1$
$(a+b)^2$
$(a+b)^3$
$(a+b)^4$
$(a+b)^5$



要点② 二項定理

n 個のものから r 個取り出す組合せの総数　　を用いて，$(a+b)^n$ の展開式における各項の係数を求める。

例えば，$(a+b)^2=\overset{①}{(a+b)}\overset{②}{(a+b)}$ の展開式において，①，②のそれぞれから a，b のいずれか一方を選んで掛け合わせ，それらの積の和を求めることで，展開式の項が得られる。項 ab は

(i)　①から a を選び，②から b を選んで掛け合わせた積

(ii)　①から b を選び，②から a を選んで掛け合わせた積

の和である。

(i)　$(a+b)(a+b)$

(ii)　$(a+b)(a+b)$

a，bのいずれか一方を選んで掛け合わせるので，項abの「a」について

（i）①からaを選ぶ（②からはbが選ばれる）

（ii）②からaを選ぶ（①からはbが選ばれる）

と見ることにより，aを①，②のどちらから選ぶかで　　通りある，といえる。これが，$(a+b)^2$の展開式$a^2+2ab+b^2$におけるabの係数　である。

$(a+b)^3=\overbrace{(a+b)}^{①}\overbrace{(a+b)}^{②}\overbrace{(a+b)}^{③}$の展開式において，項$a^2b$は①，②，③から$a$を2個，$b$を1個選んで掛け合わせた積の和によって得られる。①，②，③からbを取り出す1つを選ぶ方法が　　通りあり，これが$(a+b)^3$の展開式$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$におけるa^2bの係数　である。

$(a+b)(a+b)(a+b)$

$(a+b)(a+b)(a+b)$

$(a+b)(a+b)(a+b)$

同様に考えると，$(a+b)^3$の展開式における項a^3，$3a^2b$，$3ab^2$，b^3の係数はそれぞれ　，　，　，　である。

一般に，次の定理が成り立つ。

二項定理

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$
$$+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

二項定理における${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$を，$(a+b)^n$の展開式の「　　　」，係数${}_n\mathrm{C}_r$を「　　　」という。

2 (1) 二項定理を用いて，$(x+3)^5$ を展開せよ。

(2) $(2x-3y)^6$ の展開式における x^4y^2 の項の係数を求めよ。

Point Pickup

二項定理と一般項

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots$$
$$+ {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$ を $(a+b)^n$ の展開式の一般項，${}_n\mathrm{C}_r$ を二項係数という。

第 1 講　PART2 確認問題

1　二項定理を用いて，次の式を展開せよ。

$(x+2)^5$

$=x^5+$ アイ x^4+ ウエ x^3+ オカ x^2+ キク $x+32$

2　$(4x-3y)^5$ の展開式における xy^4 の項の係数は ケコサシ である。

PART2 二項定理

2 (1) 二項定理を用いて，$(x+3)^5$ を展開せよ。

(2) $(2x-3y)^6$ の展開式における x^4y^2 の項の係数を求めよ。

[解答]

(1) $(x+3)^5 = {}_5C_0x^5 + {}_5C_1x^4\cdot3 + {}_5C_2x^3\cdot3^2 + {}_5C_3x^2\cdot3^3 + {}_5C_4x\cdot3^4 + {}_5C_5 3^5$

$= x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243$

(2) $(2x-3y)^6$ の展開式の一般項は　${}_6C_r(2x)^{6-r}(-3y)^r = {}_6C_r\cdot2^{6-r}\cdot(-3)^rx^{6-r}y^r$

x^4y^2 は　$6-r=4$　つまり　$r=2$　のときの項である。

よって，求める係数は　${}_6C_2\cdot2^4\cdot(-3)^2=15\cdot16\cdot9=2160$

第 1 講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：10，ウエ：40，オカ：80，キク：80

[解説]

二項定理より

$$(x+2)^5$$
$$={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4\cdot2+{}_5C_2x^3\cdot2^2$$
$$+{}_5C_3x^2\cdot2^3+{}_5C_4x\cdot2^4+{}_5C_52^5 \quad \text{[A]}$$
$$=1\cdot x^5+5\cdot x^4\cdot2+\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot x^3\cdot4$$
$$+\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot x^2\cdot8+5\cdot x\cdot16+1\cdot32$$
$$=\boldsymbol{x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32}$$

[A]　二項定理
$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_nC_nb^n$

2 **[正解]** ケコサシ：1620

[解説]

$(4x-3y)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5C_r(4x)^{5-r}(-3y)^r \quad \text{[B]}$$
$$={}_5C_r\cdot4^{5-r}\cdot(-3)^rx^{5-r}y^r$$

[B]　$(a+b)^n$ の展開式の一般項は，${}_nC_ra^{n-r}b^r$

xy^4 は $r=4$ のときの項である。

よって，求める係数は

$${}_5C_4\cdot4\cdot(-3)^4=5\cdot4\cdot81=\mathbf{1620}$$